Муниципальное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №2 г. Белинского Пензенской области им Р.М. Сазонова

Конспект урока

алгебры и начала анализа

в 10 классе по теме

**«Иррациональные уравнения»**

Учитель математики Парюшкина И.А.

2020 – 2021 учебный год

**Цели урока:**

- ввести понятие иррационального уравнения, рассмотреть различные способы решения иррациональных уравнений, выделить рациональные способы решения уравнений

-развивать логическое мышление, навыки самоорганизации и коллективной работы, умения сравнивать и анализировать, обобщать и делать выводы

- воспитывать самостоятельность, умение слушать товарищей и общаться в группах, повышение интереса к предмету

**Оборудование:**

презентация, плакат с цитатой М. В. Ломоносова «Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит» (*Приложение №1*, слайд 2), карточки с заданиями, сигнальные карточки.

**Тип урока:** урок – исследование изучения и первичного закрепления новых знаний (работа в группах, где обязательно есть сильные ученики)

**Ход урока:**

**I.Организационный момент**

Ребята, сегодня на уроке мы вновь поговорим об уравнениях. Вам известно, что умение решать уравнения является важнейшим навыком в математике. Мы продолжим работу в этом направлении и изучим иррациональные уравнения. Они часто встречаются в заданиях ЕГЭ. Ученики и учитель обсуждают цели, которые хотели бы реализовать на уроке.

**II.Актуализация знаний учащихся**

Проверка домашнего задания проходит во время устной работы. Ученик на обратной стороне крыла доски записывает решение заданий. Учитель проверяет, ребята сравнивают свои результаты и оценивают работу.

Как называется данное уравнение? Какие оно имеет корни? Приведите примеры.(слайд 3)

 у = kх + b

у = а$х^{2 }$+ bх + с

у = а$х^{4}+bх^{2}+с$

$х^{2}$= а

 $\sqrt{х} $= а

**III.Изучение нового материала**

Посмотрите на записанные уравнения. Что общего в этих уравнениях?(слайд 4)

$\sqrt{3х+2}$=5

4 –$ \sqrt{х}$ =$ \sqrt{х}$

$\sqrt[3]{х+1}$=$\sqrt{х}$ – 7

Верно, неизвестное находится под знаком корня. Такие уравнения называются иррациональными. Сформулируйте определение иррационального уравнения (слайд 5). Какие известны способы решения иррациональных уравнений? Мы проведём исследовательскую работу. Класс разделяется на четыре группы и им предлагается решить одинаковое задание разными способами (*Приложение №2).* Перед началом работы учитель знакомит ребят с правилами решения иррациональных уравнений.

**Правила решения иррациональных уравнений**

|  |  |
| --- | --- |
| ***1*** | $$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}⇔\left\{f\left(x\right)=g\left(x\right), f(x)\right.\geq 0$$ |
| ***2*** | $\sqrt{f\left(x\right)}$= a$⇔$ f (х) =a2  (a$\geq $0) |
| ***3*** | $\sqrt{f(x)}$= g(x$) ⟺\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)=g^{2}(x)\\g(x)\geq 0\end{array}\right.$ |
| ***4*** | $\sqrt{f^{2}}(x)$= $\left|f(x)\right|$ |

Они высвечиваются на экране (слайд 6), обсуждаются и приводятся примеры.

**Первый способ**

Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень с последующей проверкой (слайд 7).

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4.$$

***Решение.*** Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}\right)^{2}=4^{2},$$

$$2x-3+2\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1}+4x+1=16.$$

$$2\sqrt{8x^{2}+2x-12x-3}=18-6x,$$

$$\sqrt{8x^{2}-10x-3}=9-3x.$$

Снова возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{8x^{2}-10x-3}\right)^{2}=\left(9-3x\right)^{2},$$

$$8x^{2}-10x-3=81-54x+9x^{2},$$

$$x^{2}-44x+84=0,$$

$$\left(x-42\right)\left(x-2\right)=0$$

Отсюда *x1* =42, *x2* =2.

***Проверка:***

1.Если *х* =42, то $\sqrt{2∙42-3}+\sqrt{4∙42+1}=\sqrt{81}+\sqrt{169}=22\ne 4$, значит, число 42 не является корнем уравнения.

2.Если *х* =2, то $\sqrt{4-3}+\sqrt{8+1}=4$, значит, число 2 является корнем уравнения.

***Ответ:*** 2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Способ** | **Достоинства** | **Недостатки** |
| 1 | Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень | 1.Понятно2.Доступно | 1.Словесная запись2.Сложная запись |

**Вывод.** При решении иррациональных уравнений методом возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень необходимо вести словесную запись, что делает решение понятным и доступным. Однако обязательная проверка иногда бывает сложной и занимает много времени. Этот метод можно использовать для несложных иррациональных уравнений, содержащих 1–2 радикала.

**Второй способ**

Равносильные преобразования (слайд 8).

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$$

***Решение.*** Возведем обе части уравнения в квадрат:

$\left\{\begin{array}{c}2x-3+2\sqrt{2x-3}∙\sqrt{4x+1}+4x+1=4^{2},\\2x-3\geq 0, \\4x+1\geq 0;\end{array}\right.$ $⟺$

$⟺\left\{\begin{array}{c}2\sqrt{(2x-3)(4x+1)}=16-6x+2,\\x\geq 1,5,\\x\geq -\frac{1}{4};\end{array}\right.$ $⟺ $

$$⟺\left\{\begin{array}{c}2\sqrt{8x^{2}+2x-12x-3}=18-6x,\\x\geq 1,5;\end{array}⟺\left\{\begin{array}{c}\sqrt{8x^{2}-10x-3}=9-3x,\\x\geq 1,5;\end{array}⟺\right.\right.$$

$$⟺\left\{\begin{array}{c}8x^{2}-10x-3=\left(9-3x\right)^{2},\\x\geq 1,5,\\9-3x\geq 0;\end{array}⟺\left\{\begin{array}{c}8x^{2}-10x-3=81-54x+9x^{2},\\x\geq 1,5,\\x\leq 3;\end{array}⟺\right.\right.$$

$$⟺\left\{\begin{array}{c}x^{2}-44x+84=0,\\1,5\leq x\leq 3;\end{array}⟺\left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}x=42,\\x=2\end{array}\right.\\1,5\leq x\leq 3;\end{array}⟺x=2.\right.\right.$$

***Ответ:*** 2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Способ** | **Достоинства** | **Недостатки** |
| 2 | Равносильных преобразований | 1.Отсутствие словесного описания2.Нет проверки3.Четкая логическая запись4.Последовательность равносильных переходов | 1.Громоздкая запись2.Можно ошибиться при комбинации знаков системы и совокупности |

**Вывод.** При решении иррациональных уравнений методом равносильных переходов нужно четко знать, когда ставить знак системы, а когда – совокупности. Громоздкость записи, различные комбинации знаков системы и совокупности нередко приводят к ошибкам. Однако последовательность равносильных переходов, четкая логическая запись без словесного описания, не требующая проверки, являются бесспорными достоинствами данного способа.

**Третий способ**

Функционально-графический (слайд 9).

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4.$$

***Решение.***

$$\sqrt{2x-3}=4-\sqrt{4x+1}.$$

Рассмотрим функции $y=f\left(x\right)=\sqrt{2x-3} и y=g\left(x\right)=4-\sqrt{4x+1}.$

1.Функция $f\left(x\right)=\sqrt{2x-3}=(2x-3)^{\frac{1}{2}}$; является возрастающей, так как показатель степени – положительное (нецелое) число.

Найдем область определения функции *D(f)*.

$$2x-3\geq 0⇔x\geq 1,5.$$

$$D\left(f\right)=\left[1,5;+\infty \right).$$

Составим таблицу значений *x* и *f(x)*.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 1,5 | 2 | 3,5 | 6 |
| *f(x)* | 0 | 1 | 2 | 3 |

2.Функция $g\left(x\right)=4-\sqrt{4-(4x+1)^{\frac{1}{2}}}$ степенная; является убывающей.

Найдем область определения функции D(g).

$$4x+1\geq 0⇔4x\geq -1⇔x\geq -\frac{1}{4}.$$

$$D\left(g\right)=\left[-\frac{1}{4};+\infty \right).$$

Составим таблицу значений *x* и *g(x)*.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | $$-\frac{1}{4}$$ | 0 | 2 | 6 |
| *g(x)* | 4 | 3 | 1 | -1 |

Построим данные графики функций в одной системе координат.



Графики функций пересекаются в точке с абсциссой х=2. Так как функция f(x) возрастает, а функция g(x) убывает, то решение уравнения будет только одно.

***Ответ:*** 2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Способ** | **Достоинства** | **Недостатки** |
| 3 | Функционально-графический | 1.Наглядность2.Не нужно делать сложных алгебраических преобразований и следить за ОДЗ3.Позволяет найти количество решений | 1.Словесная запись2.Не всегда можно найти точный ответ, а если ответ точный, то нужна проверка |

**Вывод.** Функционально-графический метод является наглядным, позволяет найти количество решений, но применять его лучше тогда, когда легко можно построить графики рассматриваемых функций и получить точный ответ. Если ответ приближенный, то лучше воспользоваться другим методом.

**Четвертый способ**

Введение новой переменной (слайд 10).

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4.$$

***Решение.*** Введем новые переменные, обозначив $\sqrt{2x-3}=a, \sqrt{4x+1}=b.$ Получим первое уравнение системы $a+b=4.$

Составим второе уравнение системы.

Для переменной а:

$$\sqrt{2x-3}=a,$$

$$a^{2}=2x-3,$$

$$2a^{2}=4x-6,$$

$$a\geq 0.$$

Для переменной b:

$$\sqrt{4x+1}=b,$$

$$b^{2}=4x+1.$$

Поэтому

$$2a^{2}-b^{2}=-7,$$

$$b\geq 0.$$

Получим систему двух рациональных уравнений, относительно а и b:

$$\left\{\begin{array}{c}a+b=4,\\2a^{2}-b^{2}=-7,\\a\geq 0,b\geq 0;\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}b=4-a,\\2a^{2}-\left(4-a\right)^{2}=-7,\\a\geq 0,b\geq 0;\end{array}\right.\right.⇔$$

$$⇔\left\{\begin{array}{c}b=4-a,\\2a^{2}-16+8a-a^{2}+7=0,\\a\geq 0,b\geq 0;\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}b=4-a,\\a^{2}+8a-9=0,\\a\geq 0,b\geq 0;\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}b=4-a,\\\left[\begin{array}{c}a=1,\\b=-9,\end{array}\right.\\a\geq 0,b\geq 0;\end{array}⇔\right.\right.\right.$$

$$⇔\left\{\begin{array}{c}b=4-a,\\a=1;\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}b=3,\\a=1.\end{array}\right.\right.$$

Вернувшись к переменной x, получим $\sqrt{2x-3}=1⇔2x-3=1⇔2x= =4⇔x=2.$

***Ответ:*** 2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Способ** | **Достоинства** | **Недостатки** |
| 4 | Введение новой переменной | Упрощение – получение системы уравнений, не содержащих радикалы | 1.Необходимость отслеживать ОДЗ новых переменных2.Необходимость возврата к исходной переменной |

**Вывод.** Этот метод лучше применять для иррациональных уравнений, содержащих радикалы различных степеней, или одинаковые многочлены под знаком корня, или взаимообратные выражения под знаком корня.

**Общий вывод.** Итак, для каждого иррационального уравнения (слайд 11) необходимо выбирать наиболее удобный способ решения: понятный, доступный, логически и грамотно оформленный. У вас на столах находятся карточки четырёх цветов. Поднимите красную те, кто отдал предпочтение методу возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень с проверкой, синего цвета – методу равносильных преобразований, зелёного – функционально-графическому методу, жёлтого – методу введения новой переменной.

Учитель в течение всего урока следит за осанкой учащихся. Проводит комплекс упражнений для глаз и рук.

**IV. Закрепление изученного материала.**

Каждая группа решает по одному заданию из №417 и №418(номер группы соответствует букве задания). Способ решения ребята выбирают самостоятельно. Затем группы по кругу меняются работами и оценивают своих товарищей. В случае затруднений помощь оказывает учитель.

Следующие задания выполняются в тетрадях самостоятельно №419(а), №420(а, б)

Отдельные ученики работают по карточкам (*Приложение №3*), выполняя задания:

1ученик.

1. Решите уравнение $\sqrt[3]{3х+116}$ = 5

2. Найдите корень уравнения $\sqrt{х+3} $+$ \sqrt{3х-2 }$= 7

3. Решите уравнение $\frac{\sqrt{х+2}}{\sqrt{х+4}}$ = $\sqrt{х+2}$

2ученик.

1. Решите уравнение $\sqrt[3]{84-5х}$ = 4

2. Найдите корень уравнения $\sqrt{3х+1}$ - $\sqrt{х+4}$ = 1

3. Решите уравнение $\frac{\sqrt{х-4}}{\sqrt{х-2}}$ = $\sqrt{х-4}$

**V. Итог урока.**

(слайд 12)

Теперь вы знаете, что решение иррациональных уравнений требует от вас хороших теоретических знаний, умения применять их на практике, внимания, трудолюбия, сообразительности.

Учитель оценивает учащихся и проговаривает с ними ещё раз способы решения иррациональных уравнений:

- Какое уравнение называется иррациональным?

- В чём заключаются правила решения иррациональных уравнений.

- Назовите способы решения иррациональных уравнений. Охарактеризуйте каждый из них.

**VI. Домашнее задание.**

(слайд 13)

П.33с.214-216, №419(б, в), №420(в, г)

Для более подготовленных учащихся решить иррациональные уравнения двумя или тремя способами.

Дополнительное задание:

1. $\sqrt{х+3}-\sqrt{7-х}=\sqrt{2х-8}$
2. $\sqrt[4]{4-х^{2}}+3\sqrt{х^{2}+х-6}$=0



« Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит»

***М.В. Ломоносов***

*Приложение № 2*

|  |
| --- |
| I. Решить уравнение $\sqrt{2х-3} $+$ \sqrt{4х+1}$ = 4 способом возведения обеих частей в одну и ту же степень с последующей проверкой. |
| II.Решить уравнение $\sqrt{2х-3} $+$ \sqrt{4х+1} $=4 способом равносильных преобразований. |
| III.Решить уравнение $\sqrt{2х-3} $+$ \sqrt{4х+1}$ = 4 функционально – графическим способом. |
| IV.Решить уравнение $\sqrt{2х-3} $+$ \sqrt{4х+1}$ = 4 введением новой переменной. |

*Приложение №3*

**Карточка №1**

1. Решите уравнение $\sqrt[3]{3х+116}$ = 5

2. Найдите корень уравнения $\sqrt{х+3} $+$ \sqrt{3х-2 }$= 7

3. Решите уравнение $\frac{\sqrt{х+2}}{\sqrt{х+4}}$ = $\sqrt{х+2}$

**Карточка №2**

1. Решите уравнение $\sqrt[3]{84-5х}$ = 4

2. Найдите корень уравнения $\sqrt{3х+1}$ - $\sqrt{х+4}$ = 1

3. Решите уравнение $\frac{\sqrt{х-4}}{\sqrt{х-2}}$ = $\sqrt{х-4}$